No. Date 17/3/2016

Μαθημα 8ο

Γραμμικη II

Ιδιοτιμες , ιδιοδιανυσματα και ιδιοχωρους

Γραμμικη απεικονιση
$f(\vec{u}) = \lambda \cdot \vec{u}$ με $\vec{u} \neq \vec{0}$
ιδιοτιμη ιδιοδιανυσμα
Το συνολο ολων των διανυσματων που αντιστοιχουν στην ιδιοτιμη λ μαζι με το $\vec{0}$, το συμβολιζουμε $V_f(\lambda)$ ← ιδιοχωρος

Πινακες
$x \neq 0$, $A \in K^{n\times n}$
$x \in K^{n\times 1}$ ιδιοδιανυσμα
$Ax = \lambda x$
ιδιοτιμη

$V_A(\lambda)$ ιδιοχωρος

Χαρακτηριστικο πολυωνυμο
$\chi_A = \det(A - xI) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \operatorname{Tr} A\, x^{n-1} + \dots + \det A$
Χαρακτηριστικο πολυωνυμο γραμμικης απεικονισης f
$\chi_f = \det([f]_a^a - xI)$

(*) Οι ριζες του χαρακτηριστικου πολυωνυμου ειναι ιδιοτιμες

(*) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$
$\chi_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \operatorname{Tr} A\, x^{n-1} + \dots + \det A$
$= (-1)^n (x-\lambda_1)(x-\lambda_2) \dots (x-\lambda_n) =$
{Οι ριζες αυτες $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ειναι ιδιοτιμες}
$= (-1)^n x^n + (-1)^n(-\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n) x^{n-1} + \dots + (-1)^n(-\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n) =$
$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) x^{n-1} + \dots + (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)$

$\operatorname{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ Ειναι και το αθροισμα των ιδιοτιμων
$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ Ειναι το γινομενο των ιδιοτιμων

(*) $A \in K^{n\times n}$ και A (ανω ή κατω τριγωνικος)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

• Για να βρω τις ιδιοτιμες κοιταζω τις ριζες του χαρακτηριστικου πολυωνυμου

$$X_A(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}-x \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}-x)(a_{22}-x)\cdots(a_{nn}-x)$$

Οποτε ιδιοτιμες $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$

Ορισμος

Εστω $f: V \to V$ μια γραμμικη απεικονιση. Αν υπαρχει μια διατεταγμενη βαση $a = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ του V τετοια ωστε ο πινακας $[f]_a^a$ να ειναι διαγωνιος τοτε θα λεμε οτι η γραμμικη απεικονιση f ειναι διαγωνιοποιησιμη

Θεωρημα

Μια γραμμικη απεικονιση $f: V \to V$ ειναι διαγωνιοποιησιμη αν και μονο αν υπαρχει μια διατεταγμενη βαση $a = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ που αποτελειται απο ιδιοδιανυσματα

Αποδειξη θεωρηματος

(⇒) f διαγωνιοιμη αρα υπαρχει διατεταγμενη βαση $a=\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n\}$ τετοια ωστε $[f]_a^a = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

θα προσπαθησω να δειξω οτι το $\vec{a}_1$ ειναι ιδιοδιανυσμα

για να ειναι αρχικα πρεπει $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$

- $\vec{a}_1$ ειναι στοιχειο της βασης αρα $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$
- $f(\vec{a}_1) = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_n = \lambda_1 \vec{a}_1$

Αρα $\vec{a}_1$ ιδιοδιανυσμα

- $\vec{a}_2$ στοιχειο της βασης αρα $\vec{a}_2 \neq \vec{0}$
- $f(\vec{a}_2) = 0 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_n = \lambda_2 \cdot \vec{a}_2$

Αρα $\vec{a}_2$ ιδιοδιανυσμα

Συνεχιζω ετσι για ολα τα διανυσματα της βασης $a=\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n\}$

- $\vec{a}_n$ στοιχειο της βασης αρα $\vec{a}_n \neq \vec{0}$
- $f(\vec{a}_n) = 0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = \lambda_n \cdot \vec{a}_n$

Αρα και το $\vec{a}_n$ ιδιοδιανυσμα

Επομενως η βαση a αποτελειται απο ιδιοδιανυσματα

(⇐) Η βαση $a=\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n\}$ αποτελειται απο ιδιοδιανυσματα που σημαινει οτι ολα τα $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n \neq 0$ και οτι η εικονα παει σε καποιο πολλαπλασιο δηλαδη

$\vec{a}_1$ ιδιοδιανυσμα της f αρα $f(\vec{a}_1) = \lambda_1 \vec{a}_1$

$\vec{a}_2$ ιδιοδιανυσμα της f αρα $f(\vec{a}_2) = \lambda_2 \cdot \vec{a}_2$

$\vec{a}_n$ ιδιοδιανυσμα της f αρα $f(\vec{a}_n) = \lambda_n \cdot \vec{a}_n$

$$[f]_a^a = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$f(\vec{a}_1) = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_n$ η $1^η$ στήλη

$f(\vec{a}_2) = 0 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_n$ η $2^η$ στήλη

$\vdots$

$f(\vec{a}_n) = 0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_{n-1} + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$ η n στήλη

Επομένως η f διαγωνιοποιήσιμη

Ορισμός

Ένας πίνακας $A \in K^{n\times n}$ ονομάζεται **διαγωνιοποιήσιμος** αν είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{bmatrix}$

f γραμμικές απεικονίσεις

$L_A : K^{n\times 1} \to K^{n\times 1}$ (στέλνει στήλες σε στήλες)

$L_A(x) = A\cdot x$

$L_A(x) = Ax = \lambda x$

Πίνακες

A

λ ιδιοτιμή

$x \neq 0$ ιδιοδιάνυσμα

$Ax = \lambda x$

$$[L_A]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$[L_A]_\varepsilon^\varepsilon = A$, ε κανονικη βαση του K

$$[L_A]_\varepsilon^\varepsilon = [I]_\alpha^\varepsilon \, [L_A]_\alpha^\alpha \, [I]_\varepsilon^\alpha$$

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Θεωρημα

Ο πινακας $A \in K^{n\times n}$ ειναι διαγωνισιμος αν και μονο αν υπαρχει (διατεταγμενη) βαση του $K^{n\times 1}$ που αποτελειται απο ιδιοδιανυσματα.

Φροντ. Ασκ. #2

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δεν μπορω να κανω πρωτα γραμμοπραξεις και μετα να βρω το χαρακτ. πολυωνυμο γιατι δεν ειναι ιδιο με το χαρακτ. πολυων. του αρχικου.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

αρκει να βρω μια βαση του χωρου των στηλων

Πρωτο βημα : πρεπει να βρω το χαρακτηριστικο πολυωνυμο (σαν γινομενο πρωτοβαθμιων)

$$\chi_A(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} 3-x & 0 & -1 \\ 0 & 2-x & 0 \\ -1 & 0 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$$= (2-x) \begin{vmatrix} 3-x & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3-x \end{vmatrix} =$$

No. Date

$$= (2-x)\left[0 + (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3-x & -1 \\ -1 & 3-x \end{vmatrix} + 0\right] =$$

$$= (2-x)\left((3-x)^2 - 1\right) = (2-x)(3-x-1)(3-x+1) =$$
$$= -(x-2)(x-2)(x-4) = -(x-2)^2(x-4)$$

Αρα οι ιδιοτιμες μας ειναι 2 (διπλη) και 4 (απλη)

$$V_A(2) = \{X \in \mathbb{R}^{3\times1} / AX = 2X\} = \{X \in \mathbb{R}^{3\times1} / (A-2I)X = 0\}$$

$$(A-2I) = \begin{bmatrix} 3-2 & 0 & -1 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ -1 & 0 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παιρνω τον επαυξημενο

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Αρα αν βαλω $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ θα εχω απο τον

Επαυξημενο πινακα $\begin{cases} x + 0y - z = 0 \\ y = s \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$

και ξανα γραφω πιου σειν εξισωση

$$V_A(2) = \left\{\begin{pmatrix} t \\ s \\ t \end{pmatrix} / t, s \in \mathbb{R}\right\} = \left\{t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} / t, s \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

No. Date

Τα διανυσματα $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ παραγουν τον χωρο

και ειναι βαση (επιπλεον Γ.Α)

Αρα $V_A(2) = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rangle$

$V_A(4) = \left\{ X \in \mathbb{R}^{3\times1} \,/\, (A-4I)X = 0 \right\}$

Ο πινακας αυτου του συστηματος θα ειναι ο

$$\begin{bmatrix} 3-4 & 0 & -1 \\ 0 & 2-4 & 0 \\ -1 & 0 & 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Οποτε $(A-4I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Παιρνω τον επαυξημενο

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_2 \to -\frac{\Gamma_2}{2}]{\Gamma_1 \to -\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Οποτε εχω $\begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$

! Αν βρουμε ιδιοχωρο μηδενικο τοτε καπου εχουμε κανει λαθος...

Τελικά έχω $V_A(4) = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} =$

$= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Οπότε $V_A(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ και $V_A(4) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Για να δω αν αυτά τα τρία διανύσματα αποτελούν βάση αρκεί $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$ άρα τα

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι Γ.Α και $\dim \mathbb{R}^{3\times1} = 3$ άρα

αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^{3\times1}$

Επομένως υπάρχει βάση του $\mathbb{R}^{3\times1}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα. Συνεπώς ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος

(ii) Βρείτε πίνακα P ώστε $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος

$L_A : \mathbb{R}^{3\times1} \to \mathbb{R}^{3\times1}$ με $L_A(X) = AX$

$[L_A]_a^a = [I]_\varepsilon^a [L_A]_\varepsilon^\varepsilon [I]_a^\varepsilon$, ε κανονική βάση

Παίρνω την βάση a να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα

$a = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$A = [L_A]_{\varepsilon}^{\varepsilon}$$

$$[L_A]_a^a = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L_A = A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$ 1η στηλη

$$L_A = A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$ 2η στηλη

$$L_A = A\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$P = [I]_a^{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$ 1η στηλη

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$ 2η στηλη

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = -1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$ 3η στηλη

$$P^{-1} = [I]^{a}_{e} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

1^{η} στήλη

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \kappa \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1 = \kappa - \mu \\ 0 = \lambda \\ 0 = \kappa + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2\kappa \\ \lambda = 0 \\ \kappa = -\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa = 1/2 \\ \lambda = 0 \\ \mu = -1/2 \end{cases}$$

2^{η} στήλη

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \kappa - \mu = 0 \\ \lambda = 1 \\ \kappa + \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa = 0 \\ \lambda = 1 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

3^{η} στήλη

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \kappa - \mu = 0 \\ \lambda = 0 \\ \kappa + \mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa = \mu \\ \lambda = 0 \\ \kappa + \mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa = 1/2 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 1/2 \end{cases}$$

(iii) A^m να βρουμε το m, $\forall$ ακεραιο $m \geq 1$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow PP^{-1}APP^{-1} = P\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$\Rightarrow A = P\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}P^{-1} \Rightarrow$$

$$A^m = \left(P\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}P^{-1} \right)^m =$$

$$= P\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}P^{-1}P\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}P^{-1} \dots P\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}P^{-1} =$$

$$= P\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^m P^{-1} = P\begin{bmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{bmatrix}P^{-1}$$

Αρα $$A^m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2^m & 0 & -4^m \\ 0 & 2^m & 0 \\ 2^m & 0 & 4^m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{m-1} + 4^m/2 & 0 & 2^{m-1} - 4^m/2 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 2^{m-1} - 4^m/2 & 0 & 2^{m-1} + 4^m/2 \end{bmatrix}$$

No. Date

Ασκ 7

$A, B \in \mathbb{D}^{n\times n}$. Δείξτε ότι AB, BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές

Έστω λ ιδιοτιμή του AB $x \neq 0$, $x \in \mathbb{D}^{n\times 1}$
τέτοια ώστε:
$\rightarrow ABx = \lambda x \Rightarrow BABx = B\lambda x = \lambda Bx$
$BA(Bx) = \lambda(Bx)$

$Bx \neq 0$ ή $Bx = 0$
↳ αν ισχύει έχω τελειώσει
Αν $Bx = 0 \Rightarrow ABx = A \cdot 0 \Rightarrow \lambda x = ABx = A0 = 0 \overset{x\neq 0}{\Rightarrow}$
$\lambda = 0$

Έστω $\lambda = 0 \xRightarrow[\lambda \text{ ιδιοτ}]{\text{το } 0 \text{ ιδιοτιμή του } AB} \det(AB - \cancel{\lambda}^{0} I) = 0 \Rightarrow \det(AB) = 0$
$\Rightarrow \det A \det B = 0 \Rightarrow \det B \cdot \det A = 0 \Rightarrow \det(BA) = 0$
$\Rightarrow \det(BA - 0I) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ιδιοτιμή του BA

Έστω $\lambda \neq 0$ και λ ιδιοτιμή του $AB \Rightarrow$ υπάρχει $x \in \mathbb{D}^{n\times 1}$
με $x \neq 0$ τέτοιο ώστε $\underbrace{ABx = \lambda x}_{(1)} \Rightarrow BABx = B\lambda x \Rightarrow$
$BA(Bx) = \lambda \underbrace{(Bx)}_{\text{στήλη}}$

Διακρίνω περιπτώσεις
(α) $Bx \neq 0 \Rightarrow \lambda$ ιδιοτιμή του BA
(β) $Bx = 0 \xRightarrow{\in \mathbb{D}^{n\times 1}} ABx = A0 = 0 \Rightarrow ABx = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \lambda x = 0$
$\Rightarrow \lambda \neq 0, x \neq 0$ άτοπο
Επομένως $Bx \neq 0$
Άρα κάθε ιδιοτιμή του AB είναι και ιδιοτιμή του BA
Όμοια κάθε ιδιοτιμή του BA είναι και ιδιοτιμή του AB
δηλαδή έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές οι δύο πίνακες AB και BA

Ασκ 6

$A \in K^{n\times n}$, λ ιδιοτιμη του A] → ισχυει

$\phi(x) \in K[x]$ πολυωνυμο

λ ιδιοτιμη του A τοτε $\phi(\lambda)$ ιδιοτιμη του $\phi(A)$

Σκεψη

$\phi(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

$\phi(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n$

$\phi(A) = a_0 I_{n\times n} + a_1 A + \dots + a_n A^n$

Στην πραγματικοτητα θελω ν.δ.ο $\phi(A)\cdot x = \phi(A)\cdot x$

Λυση στο επομενο μαθημα.